Soluciones a los ejercicios del examen del 17 de Febrero de 1998

1. Justifíquese que la función $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ dada por:

$$f(z)=2z-(1+z)\log(1+z)+(1-z)\log(1-z) \quad (z\neq\pm 1),$$

y $f(1)=2-2\log(2)=-f(-1)$, es holomorfa en $\Omega=\mathbb{C}\setminus\{x\in\mathbb{R}:|x|\geq 1\}$ y, para todo $z\in\overline{D(0,1)}$, se verifica que $f(z)=\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^{2n+1}}{n(2n+1)}$. Calcúlese, en particular, la suma de la serie $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^n}{n(2n+1)}$.

Solución:

Teniendo en cuenta que la suma, producto y composición de funciones holomorfas también es holomorfa, y que la función *logaritmo principal* es holomorfa en $\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}_0^-$, se sigue que f es holomorfa en el conjunto $\mathcal{A}=\{z\in\mathbb{C}:1+z\notin\mathbb{R}_0^-,1-z\notin\mathbb{R}_0^-\}$. Como, evidentemente[1], $1+z\in\mathbb{R}_0^-$ si, y sólo si, $z\in\mathbb{R}$ y $z\leq -1$, es decir, $z\in]-\infty,-1]$; y $1-z\in\mathbb{R}_0^-$ si, y sólo si, $z\in\mathbb{R}$ y $z\geq 1$, es decir, $z\in[1,+\infty[$; resulta que $\mathcal{A}=\Omega$.

Como[2] para $|z|<1$, $\log(1+z)=\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}z^n$, se sigue que, para $|z|<1$, es:

$$\begin{aligned}
f(z) &= 2z-\log(1+z)+\log(1-z)-z(\log(1+z)+\log(1-z))=\\
&= 2z+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n-1}{n}z^n-z\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}-1}{n}z^n=\\
&= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{-2}{2n+1}z^{2n+1}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}z^{2n+1}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{2}{2n+1}\right)z^{2n+1}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^{2n+1}}{n(2n+1)}.
\end{aligned}$$

Por otra parte, como la serie $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n(2n+1)}$ es convergente, el criterio de la mayorante de Weierstrass[3] implica que la serie $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\frac{z^{2n+1}}{n(2n+1)}$ converge uniformemente en $\overline{D(0,1)}$ y, por tanto, la función $h:\overline{D(0,1)}\to\mathbb{C}$ definida por $h(z)=\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^{2n+1}}{n(2n+1)}$, es continua en $\overline{D(0,1)}$.

Como para todo $z\in D(0,1)$ es $h(z)=f(z)$, si *justificamos que f es continua en $\overline{D(0,1)}$*, se deducirá que $h(z)=f(z)$ para todo $z\in\overline{D(0,1)}$. Ahora bien, puesto que $\overline{D(0,1)}\setminus\{\pm 1\}\subseteq\Omega$, bastará probar que f es continua en 1 y en -1. Teniendo en cuenta que

$$|1-z||\log(1-z)|\leq|1-z||\log(|1-z|)|+|1-z|\pi$$

y que $\lim\limits_{t\to 0^+}t\log(t)=0$, se sigue que $\lim\limits_{z\to 1}f(z)=f(1)$. Igualmente $\lim\limits_{z\to -1}f(z)=f(-1)$.

Finalmente[4]:

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n(2n+1)} &= \frac{1}{i}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(i)^{2n+1}}{n(2n+1)}=\frac{2i-(1+i)\log(1+i)+(1-i)\log(1-i)}{i}=\\
&= \frac{2i-(1+i)(\log\sqrt{2}+i\frac{\pi}{4})+(1-i)(\log\sqrt{2}-i\frac{\pi}{4})}{i}=\\
&= \frac{2i-2i\log\sqrt{2}-i\frac{\pi}{2}}{i}=2-\log 2-\frac{\pi}{2}.
\end{aligned}$$

2. Sea f una función continua en el disco unidad cerrado y holomorfa en su interior, tal que $f(z)=0$ para todo $z=\exp(it)$ con $0\leq t\leq\frac{\pi}{2}$. Pruébese que $f(z)=0$ para todo $z\in\overline{D(0,1)}$. Sugerencia: considérese la función $g(z)=f(z)f(iz)f(-iz)f(-z)$.

Solución:

Sea $z=e^{it}$, entonces[1]:

a) Si $-\pi\leq t\leq-\frac{\pi}{2}$, es $f(-z)=f(e^{i(t+\pi)})=0$
b) Si $-\frac{\pi}{2}\leq t\leq 0$, es $f(iz)=f(e^{i(t+\pi/2)})=0$
c) Si $0\leq t\leq\frac{\pi}{2}$, es $f(z)=0$
d) Si $\frac{\pi}{2}\leq t\leq\pi$, es $f(-iz)=f(e^{i(t-\pi/2)})=0$

por lo que $g(z)=0$ para todo $z\in C(0,1)^*$. Como g es holomorfa en $D(0,1)$, que es un dominio acotado, y es continua en $\overline{D(0,1)}$; en virtud del principio del módulo máximo, sabemos que:

$$\text{máx}\{|g(z)|:z\in\overline{D(0,1)}\}=\text{máx}\{|g(z)|:z\in C(0,1)^*\}$$

y concluimos[2] que $g(z)=0$ para todo $z\in\overline{D(0,1)}$.

Sea $0<\rho<1$, y $z\neq 0$ tal que $|z|<\rho$. Puesto que $g(z)=0$, se sigue que *alguno de los números* $f(z),f(iz),f(-iz),f(-z)$ es igual a cero y, como $|iz|=$ $=|-iz|=|-z|=|z|<\rho$, concluimos que f se anula en algun punto de $D(0,\rho)\setminus\{0\}$, es decir, si $Z(f)$ es el conjunto de los ceros de f en $D(0,1)$, hemos probado que $0\in Z(f)'\cap D(0,1)$. El principio de identidad[3] implica que $f(z)=0$ para todo $z\in D(0,1)$ y, por continuidad, concluimos que $f(z)=0$ para todo $z\in\overline{D(0,1)}$.

También puede procederse como sigue: supongamos, razonando por reducción al absurdo, que f no es idénticamente nula en $D(0,1)$. Sabemos que en tal caso, como consecuencia del principio de identidad, el conjunto $\mathcal{A}=\{z\in D(0,1):f(z)=0\}$ es numerable. Evidentemente:

$$\{z\in D(0,1):g(z)=0\}=\mathcal{A}\cup(i\mathcal{A})\cup(-\mathcal{A})\cup(-i\mathcal{A}),$$

y, según hemos probado, $\{z\in D(0,1):g(z)=0\}=D(0,1)$. Lo cual lleva a contradicción porque $D(0,1)$, que es un conjunto no numerable, no puede ser igual al conjunto $\mathcal{A}\cup(i\mathcal{A})\cup(-\mathcal{A})\cup(-i\mathcal{A})$ el cual es numerable por ser unión finita de conjuntos numerables.

3. Sea f una función entera. Para todo $r>1$ se define $\lambda(r)=\dfrac{\log M(r)}{\log r}$ donde $M(r)=\text{máx}\{|f(z)|:|z|=r\}$. Demuéstrese que f es una función polinómica si, y sólo si, λ tiene límite finito en $+\infty$.

Solución:

Supongamos que[1] $\lim\limits_{r\to+\infty}\lambda(r)=\alpha\in\mathbb{R}_0^+$, y sea $\beta>\alpha$. Por definición de límite, existe $K>0$, tal que $\lambda(r)<\beta$ siempre que $r>K$, y por tanto $\log M(r)<\beta\log r=\log(r^\beta)$, es decir $M(r)<r^\beta$. Como f es una función entera, el teorema de Taylor[2] nos dice que, para todo $z\in\mathbb{C}$, $f(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{f^{(n}(0)}{n!}z^n$, y teniendo en cuenta las desigualdades de Cauchy[3] $\left|\dfrac{f^{(n}(0)}{n!}\right|\leq\dfrac{M(r)}{r^n}$, válidas, por ser f entera, para todo $r>0$; deducimos que, para todo $r>K$, $\left|\dfrac{f^{(n}(0)}{n!}\right|\leq\dfrac{r^\beta}{r^n}$ y, tomando límites para $r\to+\infty$, se sigue que $f^{(n}(0)=0$ para todo $n>\beta$ y, por tanto, f es una función polinómica.

Supongamos ahora que f es un polinomio de grado n, y sea $a_n \neq 0$ su coeficiente líder. Entonces, como[4] $\lim\limits_{z\to\infty} \dfrac{f(z)}{a_n z^n} = 1$, se sigue, por definición de límite, que existe $K > 0$ tal que, para todo $z \in \mathbb{C}$ con $|z| > K$, es[5]: $\dfrac{1}{2} < \left|\dfrac{f(z)}{a_n z^n}\right| < \dfrac{3}{2}$, de donde se sigue que:

$$\log(|a_n|/2) + n\log|z| < \log|f(z)| < \log(3|a_n|/2) + n\log|z|$$

y deducimos que, para $|z| = r > \text{máx}\{K, 1\}$, es:

$$\log(|a_n|/2) + n\log r < M(r) < \log(3|a_n|/2) + n\log r.$$

Dividiendo por $\log r > 0$, obtenemos:

$$\frac{\log(|a_n|/2)}{\log r} + n < \lambda(r) < \frac{\log(3|a_n|/2)}{\log r} + n$$

lo que implica que $\lim\limits_{r\to+\infty} \lambda(r) = n$.

4. Sea f una función no constante, continua en el disco unidad cerrado y holomorfa en su interior, tal que $|f(z)| = 1$ siempre que $|z| = 1$. Probar que $f(\overline{D(0,1)}) = \overline{D(0,1)}$.
Sugerencia: Sea $\mathcal{U} = f(D(0,1))$. Justifíquese que $\mathcal{U} = \overline{\mathcal{U}} \cap D(0,1)$.
Solución:
Como f es holomorfa en $D(0,1)$, que es un dominio acotado, y es continua en $\overline{D(0,1)}$; en virtud del principio del módulo máximo, sabemos que:

$$\text{máx}\{|f(z)| : z \in \overline{D(0,1)}\} = \text{máx}\{|f(z)| : z \in C(0,1)^*\}$$

y concluimos que $|f(z)| \leq 1$ para todo $z \in \overline{D(0,1)}$, es decir[1], $f(\overline{D(0,1)}) \subseteq \overline{D(0,1)}$. Además, como f no es constante, el mismo principio nos dice que ha de ser $|f(z)| < 1$ siempre que $|z| < 1$; es decir $\mathcal{U} = f(D(0,1)) \subseteq D(0,1)$ (alternativamente: sabemos, en virtud del teorema de la aplicación abierta, que $\mathcal{U}$ es abierto y, al estar contenido en el disco unidad cerrado, debe de estar contenido en su interior $D(0,1)$). Hemos probado[2] que $\mathcal{U} \subseteq \overline{\mathcal{U}} \cap D(0,1)$.

Para probar la inclusión contraria, sea $w \in \overline{\mathcal{U}} \cap D(0,1)$. Por definición de adherencia[3]: $w = \text{lím}\{w_n\}$ donde $w_n \in \mathcal{U}$, es decir, $w_n = f(z_n)$ para $z_n \in D(0,1)$. Como la sucesión $\{z_n\}$ es acotada, en virtud del teorema de Bolzano-Weierstrass, podemos suponer sin pérdida de generalidad que es convergente (en otro caso bastaría sustituirla por una parcial suya convergente). Sea, pues, $\text{lím}\{z_n\} = z$. Naturalmente, $z \in \overline{D(0,1)}$ y, por continuidad de f, es $f(z) = w$. Además, como $|w| < 1$, se sigue de las hipótesis hechas, que ha de ser $|z| < 1$. Concluimos así que $w = f(z) \in f(D(0,1)) = \mathcal{U}$.

Hemos probado que $\mathcal{U} = \overline{\mathcal{U}} \cap D(0,1)$. Se sigue que $\mathcal{U}$ es abierto (teorema de la aplicación abierta) y cerrado relativo a $D(0,1)$ y, por conexión, ha de verificarse que $\mathcal{U} = D(0,1)$. Como $f(\overline{D(0,1)})$ es cerrado por ser la imagen continua de un compacto, y $f(\overline{D(0,1)}) \supseteq \mathcal{U} = D(0,1)$, deducimos que $f(\overline{D(0,1)}) \supseteq \overline{D(0,1)}$ y, finalmente, concluimos que $f(\overline{D(0,1)}) = \overline{D(0,1)}$.